サマースクール
数学　第２講座

都立入試大問２集

組　　　番　名前

H28

2 ある中学校で，Ｓさんが作った問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［Ｓさんが作った問題］

右の図１は，「かけ算九九の表」の一部である。

図１において，かけられる数とかける数を除く25個の数の中から，縦と横がともに３マスの正方形の枠を用いて，１マスに１個の数が入るように，９個の数を囲むことを考える。

右の図２は，図１において，縦と横がともに３マスの正方形の枠を用いて，四すみのうち，左上の数が２，右上の数が４，左下の数が６，右下の数が12となるように９個の数を囲んだ場合を表している。

囲んだ９個の数の四すみの数について，左上の数と右下の数の和をＰ，右上の数と左下の数の和をＱとしたとき，Ｐ＋Ｑの値が整数の２乗で表される数となる９個の数の囲み方は，全部で何通りあるか調べてみよう。

図１

かける数

かけられる数	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

図２

かける数

かけられる数	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

〔問１〕 次の［　　］の中の「あ」に当てはまる数字を答えよ。

［Ｓさんが作った問題］で，Ｐ＋Ｑの値が整数の２乗で表される数となる９個の数の囲み方は，全部で［ あ ］通りある。

先生は，［Ｓさんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

右の図３は，「かけ算九九の表」である。

n を２から９までの自然数とし，図３において，かけられる数とかける数を除く81個の数の中から，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて，１マスに１個の数が入るように，n^2 個の数を囲むことを考える。

囲んだ n^2 個の数の四すみの数について，左上の数と右下の数の和をＰ，右上の数と左下の数の和をＱとしたとき，Ｐ－Ｑの値を求める。

例えば，$n=4$ のとき，左上の数が１，右上の数が４となるように16個の数を囲んだ場合，

Ｐ－Ｑ＝$(1+16)-(4+4)=9=3^2$ となる。

また，$n=5$ のとき，左上の数が10，右上の数が18となるように25個の数を囲んだ場合，

Ｐ－Ｑ＝$(10+54)-(18+30)=16=4^2$ となる。

図３で示した「かけ算九九の表」の中の数を，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて囲むとき，Ｐ－Ｑ＝$(n-1)^2$ となることを確かめなさい。

図３

かける数

かけられる数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

〔問２〕 ［先生が作った問題］で，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて囲んだ n^2 個の数の四すみの数のうち，左上の数のかけられる数を a，かける数を b とする。

このとき，左上の数，右上の数，左下の数，右下の数をそれぞれ a，b，n を用いた式で表し，Ｐ－Ｑ＝$(n-1)^2$ となることを証明せよ。

H29

2 ある中学校で，Ｓさんが作った問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［Ｓさんが作った問題］

右の図１のように，上から順に，１段目に２個，２段目に３個，３段目に４個と，１段ごとに１個ずつマスを増やし，左端のマスが縦にそろうように10段目まで並べたものを考える。

全ての段の左端のマスに５，右端のマスに-3を入れる。

２段目以降にある両端のマス以外のそれぞれのマスに，１つ上の段にある真上のマスと，その左隣のマスに入っている２つの数の和を入れる。例えば，２段目の中央のマスには，１段目の-3と１段目の５の和である２が入る。

このとき，10段目にある▢で示したマスに入る数を考えてみよう。

なお，図１は，全ての段の左端のマスに５，右端のマスに-3を入れ，両端のマス以外のそれぞれのマスについて，２段目，３段目の順に，３段目まで数を入れた場合を表している。

図１

１段目	5	-3						
２段目	5	2	-3					
３段目	5	7	-1	-3				
４段目	5				-3			
⋮		⋮				⋱		
10段目	5						…	▢	-3

〔問１〕［Ｓさんが作った問題］で，10段目にある▢で示したマスに入る数を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア -22　　**イ** -19　　**ウ** 37　　**エ** 42

先生は，［Ｓさんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

右の図２は，上から順に，１段目に２個，２段目に３個，３段目に４個と，１段ごとに１個ずつマスを増やし，左端のマスが縦にそろうように５段目まで並べたものである。

図３は，図２において，全ての段の左端のマスに１，右端のマスに４を入れ，２段目以降にある両端のマス以外のそれぞれのマスに，１つ上の段にある真上のマスと，その左隣のマスに入っている２つの数の和を入れたものである。

図２

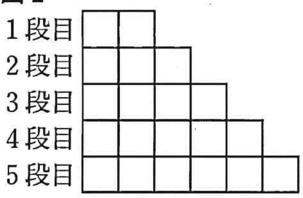


図３のそれぞれの段において，全てのマスに入っている数の和について考えると，

１段目は，$1+4=5$
２段目は，$1+5+4=10=5\times2$
３段目は，$1+6+9+4=20=5\times4$
４段目は，$1+7+15+13+4=40=5\times8$
５段目は，$1+8+22+28+17+4=80=5\times16$となり，

２段目以降のそれぞれの段において，全てのマスに入っている数の和は，１段目の２個のマスに入っている数の和である５の倍数となっている。

図３

１段目	1	4				
２段目	1	5	4			
３段目	1	6	9	4		
４段目	1	7	15	13	4	
５段目	1	8	22	28	17	4

図２において，全ての段の左端のマスに入れる数をa，右端のマスに入れる数をbとし，２段目以降にある両端のマス以外のそれぞれのマスに，１つ上の段にある真上のマスと，その左隣のマスに入っている２つの数の和を入れるとき，５段目にある６個のマスに入っている数の和は，１段目の２個のマスに入っている数の和の16倍となることを確かめなさい。

ただし，a，bは自然数とする。

〔問２〕［先生が作った問題］で，５段目にある６個のマスに入っている数をそれぞれa，bを用いた式で表し，５段目にある６個のマスに入っている数の和は，１段目の２個のマスに入っている数の和の16倍となることを証明せよ。

H30

2 ある中学校で，Ｓさんが作った問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［Ｓさんが作った問題］

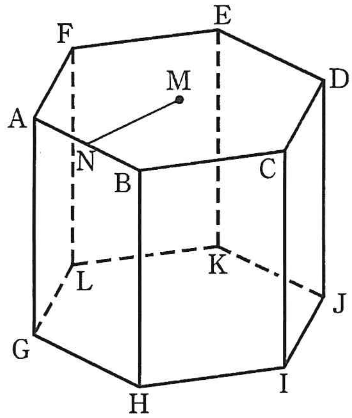
a，b，h を正の数とする。

右の図１に示した立体ＡＢＣＤＥＦ－ＧＨＩＪＫＬは，底面が１辺 a cm の正六角形，高さが h cm，６つの側面が全て合同な長方形の正六角柱である。

正六角形ＡＢＣＤＥＦにおいて，対角線ＡＤと対角線ＣＦの交点をＭ，点Ｍから辺ＡＢに垂線を引き，辺ＡＢとの交点をＮとし，線分ＭＮの長さを b cmとする。

立体ＡＢＣＤＥＦ－ＧＨＩＪＫＬの表面積を Ｐcm^2 とするとき，Ｐを a，b，h を用いて表してみよう。

図１



Ｔさんは，［Ｓさんが作った問題］の答えを次の形の式で表した。Ｔさんの答えは正しかった。

〈Ｔさんの答え〉　$P = 6a(\boxed{})$

〔問１〕〈Ｔさんの答え〉の $\boxed{}$ に当てはまる式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　$\dfrac{1}{2}b + h$　　**イ**　$b + h$　　**ウ**　$b + 2h$　　**エ**　$2b + h$

先生は，［Ｓさんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

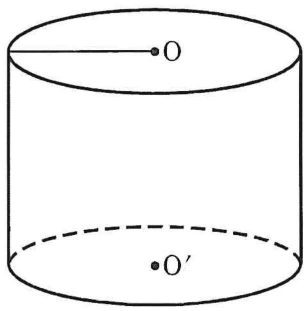
［先生が作った問題］

h，ℓ，r を正の数とする。

右の図２に示した立体は，底面が半径 r cm の円，高さが h cm の円柱であり，２つの底面の中心Ｏ，Ｏ′を結んでできる線分は，２つの底面に垂直である。

この立体について，底面の円周を ℓ cm，表面積をＱ cm^2 とするとき，$Q = \ell(h + r)$ となることを確かめなさい。

図２



〔問２〕［先生が作った問題］で，ℓ を r を用いて表し，$Q = \ell(h + r)$ となることを証明せよ。
ただし，円周率は π とする。

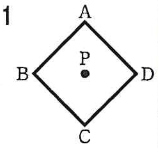
H31

2 Ｓさんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［先生が示した問題］

aを正の数，nを２以上の自然数とする。
右の**図１**で，四角形ＡＢＣＤは，１辺$a$cmの正方形であり，点Ｐは，四角形ＡＢＣＤの２つの対角線の交点である。
１辺$a$cmの正方形を，次の［**きまり**］に従って，順にいくつか重ねてできる図形の周りの長さについて考える。

図１



［**きまり**］
次の①～③を全て満たすように正方形を重ねる。
① 重ねる正方形の頂点の１つを，重ねられる正方形の対角線の交点に一致させる。
② 重ねる正方形の対角線の交点を，重ねられる正方形の頂点の１つに一致させる。
③ 対角線の交点は，互いに一致せず，全て１つの直線上に並ぶようにする。

正方形を順に重ねてできる図形の周りの長さは，右の図に示す太線(―)の部分とし，点線(----)の部分は含まないものとする。例えば右の**図２**は，２個の正方形を重ねてできた図形であり，周りの長さは$6a$cmとなる。右の**図３**は，３個の正方形を重ねてできた図形であり，周りの長さは$8a$cmとなる。
右の**図４**は，正方形をn個目まで順に重ねてできた図形を表している。
１辺$a$cmの正方形をn個目まで順に重ねてできた図形の周りの長さをＬcmとするとき，Ｌをa，nを用いて表しなさい。

図２

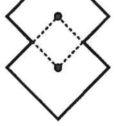


図３

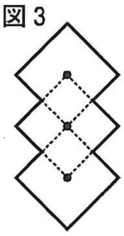
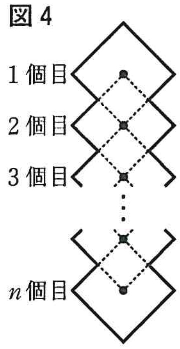


図４



Ｓさんは，［先生が示した問題］の答えを次の形の式で表した。Ｓさんの答えは正しかった。
〈Ｓさんの答え〉 Ｌ＝$\boxed{}$

〔問１〕〈Ｓさんの答え〉の$\boxed{}$に当てはまる式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア $4an$　　**イ** $a(n+4)$　　**ウ** $2a(n+2)$　　**エ** $2a(n+1)$

Ｓさんのグループは，［先生が示した問題］をもとにして，正方形を円に変え，合同な円をいくつか重ねてできる図形の周りの長さを求める問題を考えた。

［Ｓさんのグループが作った問題］

ℓ，rを正の数，nを２以上の自然数とする。
右の**図５**で，点Ｏは，半径$r$cmの円の中心である。
半径$r$cmの円を，次の［**きまり**］に従って，順にいくつか重ねてできる図形の周りの長さについて考える。

図５

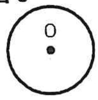
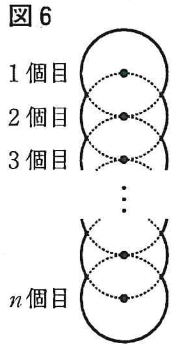


図６



［**きまり**］
次の①，②をともに満たすように円を重ねる。
① 重ねる円の周上にある１点を，重ねられる円の中心に一致させる。
② 円の中心は，互いに一致せず，全て１つの直線上に並ぶようにする。

右の**図６**は，円をn個目まで順に重ねてできた図形を表している。この図形の周りの長さは，太線(―)の部分とし，点線(----)の部分は含まないものとする。
半径$r$cmの円をn個目まで順に重ねてできた図形の周りの長さをＭcm，半径$r$cmの円の周の長さをℓcmとするとき，$M=\frac{1}{3}\ell(n+2)$となることを示してみよう。

〔問２〕［Ｓさんのグループが作った問題］で，$M=\frac{1}{3}\ell(n+2)$となることを示せ。

R2

2 Ｓさんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［先生が示した問題］

a，b，h を正の数とし，$a > b$ とする。

右の**図１**は，点Ｏ，点Ｐをそれぞれ底面となる円の中心とし，２つの円の半径がともに a cm であり，四角形ＡＢＣＤはＡＢ＝h cm の長方形で，四角形ＡＢＣＤが側面となる円柱の展開図である。

図１

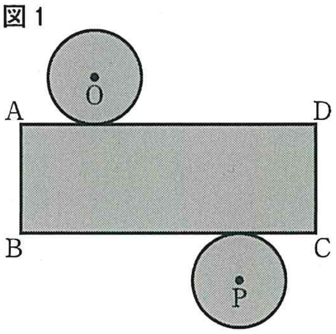
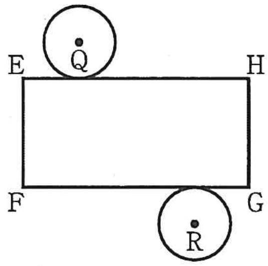


図２



右の**図２**は，点Ｑ，点Ｒをそれぞれ底面となる円の中心とし，２つの円の半径がともに b cm であり，四角形ＥＦＧＨはＥＦ＝h cm の長方形で，四角形ＥＦＧＨが側面となる円柱の展開図である。

図１を組み立ててできる円柱の体積をＸcm^3，**図２**を組み立ててできる円柱の体積をＹcm^3 とするとき，Ｘ－Ｙの値を a，b，h を用いて表しなさい。

〔問１〕［先生が示した問題］で，Ｘ－Ｙの値を a，b，h を用いて，Ｘ－Ｙ＝$\boxed{}$ と表すとき，$\boxed{}$ に当てはまる式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。
ただし，円周率は π とする。

ア $\pi(a^2 - b^2)h$　　**イ** $\pi(a - b)^2h$　　**ウ** $2\pi(a - b)h$　　**エ** $\pi(a - b)h$

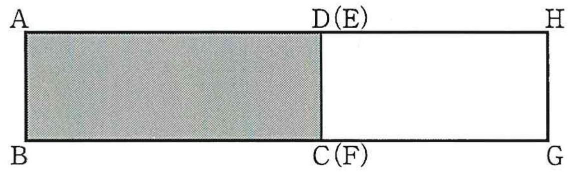
Ｓさんのグループは，［先生が示した問題］で示された２つの展開図をもとにしてできる長方形が側面となる円柱を考え，その円柱の体積と，ＸとＹの和との関係について次の問題を作った。

［Ｓさんのグループが作った問題］

a，b，h を正の数とし，$a > b$ とする。

右の**図３**で，四角形ＡＢＧＨは，**図１**の四角形ＡＢＣＤの辺ＤＣと**図２**の四角形ＥＦＧＨの辺ＥＦを一致させ，辺ＡＨの長さが辺ＡＤの長さと辺ＥＨの長さの和となる長方形である。

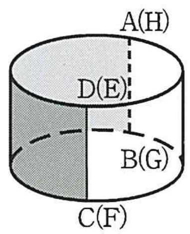
図３



右の**図４**のように，**図３**の四角形ＡＢＧＨが円柱の側面となるように辺ＡＢと辺ＨＧを一致させ，組み立ててできる円柱を考える。

［先生が示した問題］の２つの円柱の体積ＸとＹの和をＷcm^3，**図４**の円柱の体積をＺcm^3 とするとき，Ｚ－Ｗ＝$2\pi abh$ となることを確かめてみよう。

図４



〔問２〕［Ｓさんのグループが作った問題］で，Ｚ－Ｗ＝$2\pi abh$ となることを証明せよ。
ただし，円周率は π とする。

R3

2　Sさんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［先生が示した問題］

aを正の数，nを自然数とする。

右の**図1**のように，1辺の長さが$2a$ cmの正方形に，各辺の中点を結んでできた四角形を描いたタイルがある。正方形と描いた四角形で囲まれてできる，░で示された部分の面積について考える。

図1のタイルが縦と横にn枚ずつ正方形になるように，このタイルを並べて敷き詰める。右の**図2**は，$n=2$の場合を表している。

図1のタイルを縦と横にn枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形で，░で示される部分の面積をP cm^{2}とする。

また，**図1**のタイルと同じ大きさのタイルを縦と横にn枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形と同じ大きさの正方形で，各辺の中点を結んでできる四角形を描いた別のタイルを考える。右の**図3**は，$n=2$の場合を表している。

図1と同様に，正方形と描いた四角形で囲まれてできる部分を■で示し，その面積をQ cm^{2}とする。

$n=5$のとき，PとQをそれぞれaを用いて表しなさい。

図1

図2

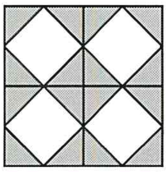
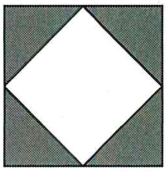


図3



〔問1〕　次の ① と ② に当てはまる式を，下のア～エのうちからそれぞれ選び，記号で答えよ。

［先生が示した問題］で，$n=5$のとき，PとQをそれぞれaを用いて表すと，
P＝ ① ，Q＝ ② となる。

①　ア　$\dfrac{25}{2}a^2$　　イ　$50a^2$　　ウ　$75a^2$　　エ　$100a^2$

②　ア　$\dfrac{25}{2}a^2$　　イ　$25a^2$　　ウ　$50a^2$　　エ　$75a^2$

Sさんのグループは，［先生が示した問題］をもとにして，正方形のタイルの内部に描いた四角形を円に変え，正方形と描いた円で囲まれてできる部分の面積を求める問題を考えた。

［Sさんのグループが作った問題］

aを正の数，nを自然数とする。

右の**図4**のように，1辺の長さが$2a$ cmの正方形に，各辺に接する円を描いたタイルがある。正方形と描いた円で囲まれてできる，░で示された部分の面積について考える。

図4のタイルが縦と横にn枚ずつ正方形になるように，このタイルを並べて敷き詰める。右の**図5**は，$n=2$の場合を表している。

図4のタイルを縦と横にn枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形で，░で示される部分の面積をX cm^{2}とする。

また，**図4**のタイルと同じ大きさのタイルを縦と横にn枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形と同じ大きさの正方形で，各辺に接する円を描いた別のタイルを考える。右の**図6**は，$n=2$の場合を表している。

図4と同様に，正方形と描いた円で囲まれてできる部分を■で示し，その面積をY cm^{2}とする。

図4のタイルが縦と横にn枚ずつ並ぶ正方形になるように，このタイルを敷き詰めて，正方形と円で囲まれてできる部分の面積X，Yをそれぞれ考えるとき，X＝Yとなることを確かめてみよう。

図4

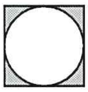


図5

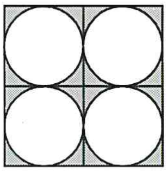
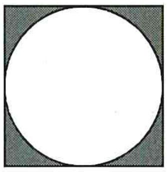


図6



〔問2〕　［Sさんのグループが作った問題］で，X，Yをそれぞれa，nを用いた式で表し，X＝Yとなることを証明せよ。
ただし，円周率はπとする。